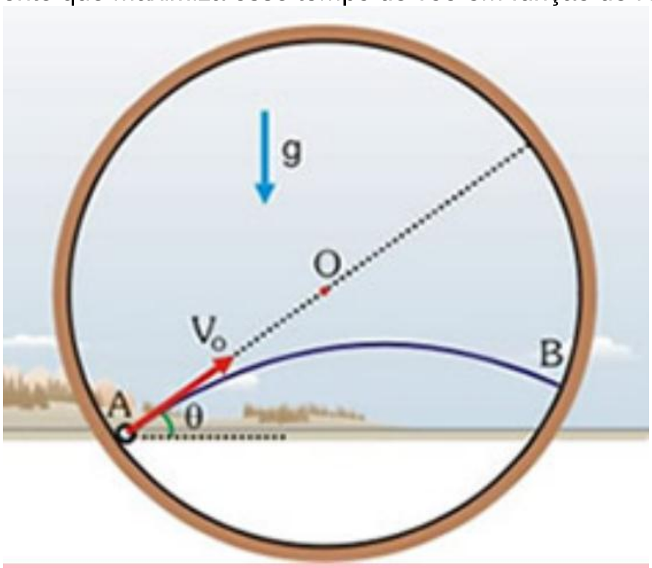
Considere um aro circular de centro O e raio R contido num plano vertical. Uma partícula é lançada obliquamente, a partir do ponto A numa direção AO que faz um ângulo θ com a horizontal e descreve uma trajetória parabólica no campo gravitacional uniforme de intensidade g até cair novamente sobre o aro. Determine:

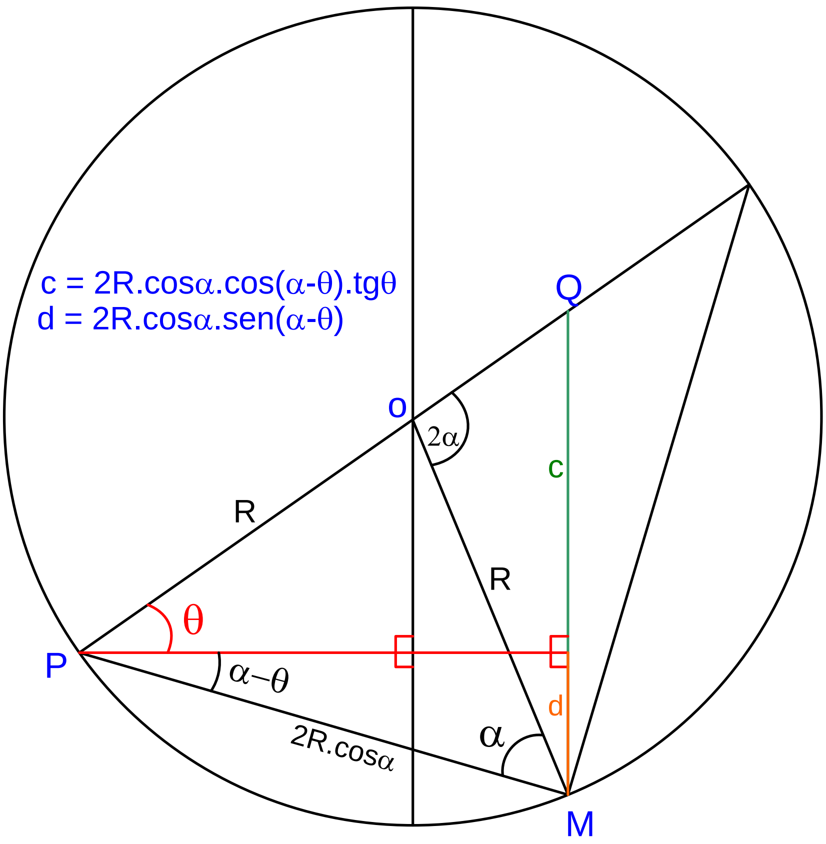
a) o máximo tempo de permanência dessa partícula no ar antes de cair novamente sobre o aro em função de R, g e θ;

b) a velocidade V_o de lançamento que maximiza esse tempo de vôo em função de R, g e θ.



Problema originalmente proposto por Orlando Ramirez – Peru e adaptado por Renato Brito - Brasil.

Resolução do prof. Renato Brito:



a)

$$\vec{S} = \vec{V}_o \cdot t + \frac{\vec{g} \cdot t^2}{2}, \quad \text{com} \quad \overrightarrow{PM} = \vec{S}, \ \overrightarrow{PQ} = \vec{V}_o.t \quad \text{e} \quad \overrightarrow{QM} = \frac{\vec{g}.t^2}{2}$$

Para maximizar o tempo de permanência no ar, devemos maximizar o termo $\overrightarrow{QM} = \dfrac{\vec{g}.t^2}{2}$.

Da figura, vemos que PoM é um triangulo isósceles cuja base valerá $\overline{PM} = R.\cos\alpha + R.\cos\alpha = 2R.\cos\alpha$

Assim, vemos que: $d = \overline{PM} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta) = 2R \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}(\alpha - \theta)$

$c = \overline{PM} \cdot \cos(\alpha - \theta) \cdot \text{tg}\theta = 2R \cdot \cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \theta) \cdot \text{tg}\theta$

Seja $H = \overline{QM} = c + d = 2R \cdot \cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \theta) \cdot \text{tg}\theta + 2R \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}(\alpha - \theta)$

$H = R \cdot \left[2\cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \theta) \cdot \text{tg}\theta + 2 \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}(\alpha - \theta)\right]$

Note que, em nosso problema, θ é dado, é conhecido visto que θ define a posição a partir de onde o projétil será lançado. Apenas α é variável à medida que o ponto M corre ao longo do arco de circunferência inferior.

Das identidades trigonométricas $\begin{matrix} 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos y = \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) \\ 2 \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) \end{matrix}$, vem:

$$H = R \cdot \left[2\cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \theta) \cdot \text{tg}\theta + 2 \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}(\alpha - \theta)\right]$$

$$H = R \cdot \left\{ [\cos(2\alpha - \theta) + \cos\theta].\text{tg}\theta + \text{sen}(2\alpha - \theta) + \text{sen}(-\theta) \right\}$$

$$H = R \cdot \left[[\cos(2\alpha - \theta).\text{tg}\theta + \text{sen}\theta + \text{sen}(2\alpha - \theta) - \text{sen}(\theta)\right]$$

$$H = R \cdot \left[[\cos(2\alpha - \theta).\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \text{sen}(2\alpha - \theta)\right] = \frac{R}{\cos\theta} \cdot \left[[\cos(2\alpha - \theta) \cdot \text{sen}\theta + \text{sen}(2\alpha - \theta) \cdot \cos\theta\right] = \frac{R}{\cos\theta} \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

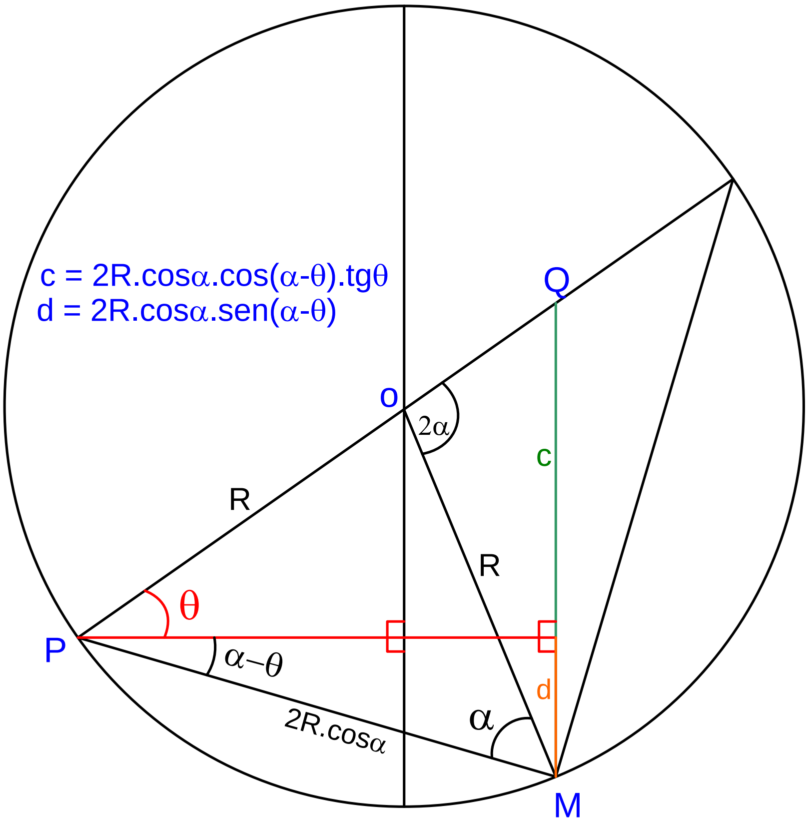
$$H = \frac{R}{\cos\theta} \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

Sendo **t** o tempo de vôo, temos que $H = \dfrac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot R \cdot \text{sen}(2\alpha)}{g \cdot \cos\theta}}$

Assim, vemos que **t** será máximo para $\text{sen}(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$. Assim, o valor máximo de **t** é:

$$t_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot sen(2\alpha)}{g \cdot \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot 1}{g \cdot \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R}{g \cdot \cos\theta}}$$

b) Para determinar a velocidade de lançamento, devemos lembrar que $\overrightarrow{PQ} = \vec{V}_o.t$, onde **t** já foi determinado anteriormente. Precisamos agora determinar PQ lembrando que α = 45º.



Da geometria do problema, vemos que: $\overline{PQ} = 2R.\cos\alpha.\cos(\alpha-\theta)\cdot\frac{1}{\cos\theta}$

Da identidade trigonométrica $2\cdot\cos x\cdot\cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$, vem:

$$\overline{PQ} = 2R.\cos\alpha.\cos(\alpha-\theta)\cdot\frac{1}{\cos\theta} = R\cdot\left[\cos(2\alpha-\theta) + \cos\theta\right]\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\overline{PQ} = R\cdot\left[\cos(90-\theta) + \cos\theta\right]\cdot\frac{1}{\cos\theta} = R\cdot\left[sen\theta + \cos\theta\right]\cdot\frac{1}{\cos\theta} = R\cdot(tg\theta+1)$$

Assim, temos: $\overline{PQ} = V_o\cdot t = R\cdot(1+tg\theta) \Rightarrow V_o\cdot\sqrt{\frac{2\cdot R}{g\cdot\cos\theta}} = R\cdot(1+tg\theta)$

$$V_o = \sqrt{\frac{R.g.\cos\theta}{2}}\cdot(1+tg\theta)$$

☺ uma ótima questão !!!!!